Tentamen Discrete Structuren (herkansing)

woensdag 17 maart 1999, 9 - 12 uur

Voor alle duidelijkheid: voor deze herkansing gelden **geen** vrijstellingen op grond van toetsresultaten.

Voor alle opgaven geldt: **beargumenteer je antwoorden**.

1. (a) Geef een definitie van het begrip *graaf*.

   (b) Geef een definitie van het begrip *graad* van een punt in een graaf.

   (c) Bewijs: het aantal punten met oneven graad in een graaf is even.

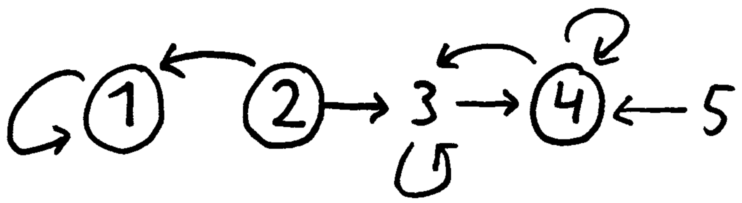
2. Bewijs met volledige inductie: $2^{n+2} + 7^n$ is deelbaar door 5, voor alle natuurlijke getallen n.

3. Zij φ gedefinieerd door $\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r))$.

   (a) Geef de waarheidstabel van φ.

   (b) Zet φ via een geannoteerd lineair bewijs om in een disjunctieve normaalvorm.

4. Zij gegeven het volgende model:



   Het eenplaatsige predikaatsymbool P wordt hierin geïnterpreteerd door de omcirkelde punten, het tweeplaatsige predikaatsymbool R door de pijlen. Geef van de volgende formules aan of zij waar zijn in dit model.

   (a) $\forall x(P(x) \rightarrow R(x, x))$

   (b) $\forall x \exists y(R(x, y) \wedge P(y))$

5. (a) Laat zien dat $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$ niet algemeen geldig is.

   (b) Bewijs $\exists x(P(x) \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \vee Q) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge Q)$ mbv. een geannoteerd lineair bewijs (x komt niet vrij voor in Q).

6. Beschouw de partieel geordende verzameling $(D(36), |)$ waar $D(36)$ de verzameling van delers van 36 is, en $|$ de deelbaarheidsrelatie aanduidt.

   (a) Teken het Hasse-diagram van $(D(36), |)$.

   (b) Waarom is $(D(36), |)$ geen Boole-algebra?

   (c) Ga na of de elementen 1,2 en 4 een complement hebben. Als er een complement bestaat is dat dan uniek?

7. Zij $X = \{1, \ldots, 10\}, R = \{(x, y) \in X^2 \mid y = 2 * x + 1\}$.

   (a) Geef expliciete definities van R, R^2, R^+, R^*.

   (b) Voor welke $n \in \mathbf{N}$ geldt $R^n = \emptyset$?

8. Welke van de volgende relaties R op $\mathbf{N}$ zijn equivalentie-relaties? Geef, in geval van een equivalentie-relatie, de equivalentieklassen aan.

   (a) mRn als er een priemgetal is dat zowel m als n deelt.

   (b) mRn als $\lfloor m/2 \rfloor = \lfloor n/2 \rfloor$.

   (c) mRn als $\lfloor (m - n)/2 \rfloor = 1$.

naam	*equivalentie*	
commutativiteit	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$
associativiteit	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$
distributiviteit	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
idempotentie	$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$
absorptie	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$
T-eigenschappen	$\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi \Leftrightarrow \top$
	$\varphi \vee \top \Leftrightarrow \top$	$\neg\top \Leftrightarrow \bot$
$\bot$-eigenschappen	$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$
	$\varphi \wedge \neg\varphi \Leftrightarrow \bot$	$\neg\bot \Leftrightarrow \top$
dubbele negatie	$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$	
De Morgan	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
implicatie-eliminatie	$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$	
equivalentie-eliminatie	$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	

distributiviteit	$\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi)$
	$\exists x\, (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi)$
dualiteit	$\exists x\, \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\, \neg\varphi$
loze universele kwantificatie	$\forall x\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$ mits x niet vrij is in φ
loze existentiële kwantificatie	$\exists x\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$ mits x niet vrij is in φ
herbenoemen variabelen	$\forall x\, \varphi \Leftrightarrow \forall y\, [y/x]\varphi$
	als y niet in φ voorkomt
verwisselen kwantoren	$\forall x\, \forall y\, \varphi \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, \varphi$
	$\exists x\, \exists y\, \varphi \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, \varphi$

gedeeltelijke distributiviteit	$\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi \Rightarrow \forall x\, (\varphi \vee \psi)$
	$\exists x\, (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$
	$\forall x\, (\varphi \vee \psi) \Rightarrow \forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$
	als x niet vrij is in φ of ψ
	$\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi \Rightarrow \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$
	als x niet vrij is in φ of ψ
instantiatie	$\forall x\, \varphi \Rightarrow [t/x]\varphi$
	als t substitueerbaar is voor x in φ
existentiële generalisatie	$[t/x]\varphi \Rightarrow \exists x\, \varphi$
	als t substitueerbaar is voor x in φ
verwisselen kwantoren	$\exists x\, \forall y\, \varphi \Rightarrow \forall y\, \exists x\, \varphi$